

УДК 532.516.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯ ТОКА – ЗАВИХРЕННОСТЬ

Е.И. Калинин, А.Б. Мазо

Аннотация

Разработан алгоритм расчета нестационарного двумерного течения вязкой жидкости, основанный на решении уравнений Навье – Стокса в преобразованных переменных и позволяющий решать как задачи вынужденного обтекания системы тел, так и задачи с заданными источниками движения в расчетной области. Для определения граничных значений функции тока на твердых стенках постановка дополнена нелокальными условиями, основанными на соотношениях Пирсона.

Ключевые слова: численное моделирование, обтекание системы тел, уравнения Навье – Стокса в переменных функция тока – завихренность, граничные условия, интегральные условия Пирсона.

Введение

При численном решении задачи плоского ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока ψ – завихренность ω возникают трудности, связанные с формулировкой и реализацией граничных условий прилипания на стенках канала и обтекаемых поверхностях (см. рис. 1). Кроме того, после перехода к преобразованным переменным определяющая система уравнений не содержит давления p , поэтому постановка задач для течений в канале с заданным перепадом давления затруднительна в рамках данного варианта уравнений Навье – Стокса.

Значения ψ на границах можно задать из геометрических соображений лишь для простейших симметричных стационарных течений. Однако при моделировании сложных нестационарных течений требуются дополнительные соотношения, определяющие значения функции тока на каждом контуре. В работах [1–3] и ряде других применяются вычислительные схемы, использующие нелокальные условия, полученные интегрированием условий Пирсона [4]; теоретические аспекты рассмотрены в монографии [5].

В настоящей статье данный подход обобщается на случай свободных течений с фиксированными внутри области источниками движения и течений с заданным перепадом давления в канале. Предлагается экономичный конечноэлементный алгоритм численного решения нестационарной системы уравнений Навье – Стокса в преобразованных переменных, дополненной нелокальными условиями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим течение жидкости в области $D = [0, L] \times [0, H]$. Границы области течения обозначим следующим образом: входное и выходное сечения – γ_{in} и γ_{out} , верхняя стенка канала – γ_0 , нижняя стенка – γ_{N+1} , границы обтекаемых

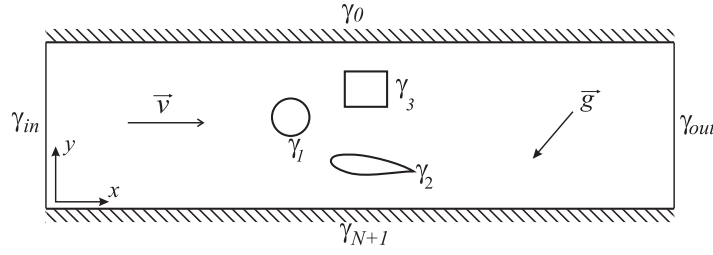


Рис. 1. Схема течения

тел – γ_i , $i = 1, \dots, N$ (рис. 1). В декартовой системе координат система уравнений Навье – Стокса в переменных $\psi - \omega$ имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega + F, \quad (1)$$

$$-\Delta \psi = \omega, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

где v_x , v_y – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости \mathbf{v} , Re – число Рейнольдса, слагаемое F в правой части уравнения (1) определяется через вектор массовых сил $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ как

$$F = \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}. \quad (3)$$

На твердых стенках зададим условие прилипания

$$x, y \in \gamma_i : \frac{\partial \psi}{\partial n} = -V_i, \quad \psi = C_i(t), \quad i = 0, \dots, N+1, \quad (4)$$

где C_i – набор неизвестных функций, а V_i – заданная касательная скорость на контуре γ_i . Для определения C_i воспользуемся соотношением Пирсона

$$x, y \in \gamma_i : \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} - g_s, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad (5)$$

в котором n и s – внешняя нормаль и касательная к границе. Следуя [5], проинтегрируем (5) по границе γ_i . Будем иметь

$$\int_{\gamma_i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \text{Re } g_s \right) ds = \text{Re } [p], \quad i = 0, \dots, N+1, \quad (6)$$

где через $[p]$ обозначен скачок давления вдоль контура γ_i . На замкнутых контурах, очевидно, $[p] = 0$, а на стенках канала величина $[p]$ равна перепаду давления на входном и выходном сечениях. Систему соотношений (6) будем использовать для определения неизвестных C_i , $i = 0, \dots, N+1$. Не нарушая общности, можно положить значение функции тока на нижней стенке равным нулю: $C_{N+1} = 0$. Тогда величина C_0 , очевидно, будет равна расходу жидкости в канале.

В настоящей статье рассматриваются течения в прямоугольных областях, где поперечная составляющая скорости набегающего потока в окрестности входного сечения равна нулю: $v_y \equiv 0$, $\partial v_y / \partial x \approx 0$. На границе γ_{in} скорость v_x , функция тока ψ , завихренность ω и расход C_0 будут связаны соотношениями

$$C_0 = \int_0^H v_x dy, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (7)$$

Представим эпюру входной скорости в виде $v_x = \tilde{v}_x C_0$, где функция $\tilde{v}_x(y)$ – нормированный профиль скорости, интеграл которого по границе γ_{in} равен единице. В дальнейшем изложении на входном сечении будут рассматриваться однородный поток жидкости, для которого

$$\tilde{v}_x(y) = 1, \quad (8)$$

а также течения с параболическим профилем

$$\tilde{v}_x(y) = -\frac{6}{H^3}y^2 + \frac{6}{H^2}y. \quad (9)$$

Используя соотношения (7), можно записать граничные условия на границе γ_{in} в виде

$$x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi = P_\psi(y) C_0, \quad \omega = P_\omega(y) C_0, \quad (10)$$

$$P_\psi(y) = \int_0^y \tilde{v}_x dy, \quad P_\omega(y) = -\frac{d\tilde{v}_x}{dy}.$$

На выходном сечении поставим «мягкие» граничные условия

$$x, y \in \gamma_{\text{out}} : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0. \quad (11)$$

Требуется найти решение системы уравнений (1), (2) с граничными условиями (4), (10), (11) и дополнительными нелокальными соотношениями (6).

2. Метод численного решения

Проведем дискретизацию с шагом τ по времени уравнения (1) таким образом, чтобы избавиться от нелинейности уравнения переноса завихренности:

$$\omega - \frac{\tau}{\text{Re}} \Delta \omega = -\tau \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tau F + \tilde{\omega}. \quad (12)$$

$$-\Delta \psi = \tilde{\omega}. \quad (13)$$

Здесь использовано стандартное обозначение $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$. На каждом временном слое уравнения (12), (13) решаются с граничными условиями (4) на твердых стенках γ_i , причем условие Дирихле используется для уравнения (13), а с помощью условий Неймана для ψ формулируются граничные условия первого рода для ω

$$x, y \in \gamma_i : \quad \omega = \tilde{\omega}, \quad i = 0, \dots, N + 1 \quad (14)$$

Для отыскания функции $\tilde{\omega}$ решается линейная задача [6]

$$\tilde{\omega} = -\Delta \psi, \quad x, y \in \gamma_i : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = -V_i, \quad i = 0, \dots, N + 1. \quad (15)$$

Заметим, что функция тока ψ на текущем временном слое определяется набором констант C_i , поэтому и завихренность ω будет зависеть от этих констант. Задачи (12), (13), (15) линейны, следовательно, можно записать линейное представление искомых функций через C_i :

$$\psi = \psi^* + \sum_{i=0}^N \psi^i C_i, \quad \omega = \omega^* + \sum_{i=0}^N \omega^i C_i, \quad (16)$$

в котором функции ψ^* , ψ^i , ω^* , ω^i подлежат определению. Множители C_i будут найдены из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^N I_i^j C_j = I_i^* + \operatorname{Re} [p], \quad i = 0, \dots, N, \quad (17)$$

полученной с помощью подстановки представления (16) в интегральные соотношения (6). Коэффициенты алгебраической системы (17) равны

$$I_i^j = \int_{\gamma_i} \frac{\partial \omega^j}{\partial n} ds, \quad I_i^* = \int_{\gamma_i} \left(-\frac{\partial \omega^*}{\partial n} + \operatorname{Re} g_s \right) ds, \quad i = 0, \dots, N.$$

Для определения функций ψ^* , ψ^i сформулируем вспомогательные задачи. Подставим представление функции тока из (16) в линейное уравнение Пуассона (13). Будем иметь:

$$-\Delta \psi^* - \sum_{i=0}^N \Delta \psi^i C_i = \tilde{\omega}.$$

Поскольку правая часть полученного равенства не зависит от констант C_i , можно разбить его на $N + 2$ уравнения следующим образом:

$$-\Delta \psi^* = \tilde{\omega}; \quad -\Delta \psi^i = 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (18)$$

Граничные условия Дирихле для уравнений (18) получаются подстановкой разложения (16) в (4) и (10):

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \quad \psi^* + \sum_{j=0}^N \psi^j C_j &= C_i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi^* + \sum_{j=0}^N \psi^j C_j &= P_\psi(y) C_0. \end{aligned}$$

Приравнявая члены при C_i , получим

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \quad \psi^* &= 0, \quad \psi^j = \delta_j^i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi^* &= 0, \quad \psi^j = \delta_j^0 P_\psi(y), \end{aligned} \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (19)$$

Здесь δ_j^i – символ Кронекера. Аналогично получаем граничные условия на выходном сечении:

$$x, y \in \gamma_{\text{out}} : \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial n} = 0. \quad (20)$$

Вспомогательные задачи (18)–(20) не содержат констант C_i ; кроме того, уравнения для ψ^i не зависят от времени, поэтому могут быть решены один раз до начала счета.

Аналогично, подставляя (16) в (12), получим уравнения для вспомогательных функций ω^* , ω^i :

$$A\omega^* = b; \quad A\omega^i = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (21)$$

где

$$A = E - \frac{\tau}{\operatorname{Re}} \Delta, \quad b = \tilde{\omega} - \tau \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tau F.$$

Граничные условия для уравнений (21) получаются в результате подстановки (16) в исходные граничные условия (4), (10), (11) для ω и приравнивания коэффициентов при C_i :

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \quad \omega^* &= \tilde{\omega}^*, \quad \omega^i = \tilde{\omega}^i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \omega^* &= 0, \quad \omega^i = \delta_i^0 P_\omega(y), \\ x, y \in \gamma_{\text{out}} : \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \omega^i}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Функции $\tilde{\omega}^*$, $\tilde{\omega}^i$ определяются как решения задач

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^* &= -\Delta \psi^*, \quad x, y \in \gamma_j : \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial n} = -V_j \\ \tilde{\omega}^i &= -\Delta \psi^i, \quad x, y \in \gamma_j : \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

следующих из (15).

В задачах (21)–(23) для ω^i , $i = 0, \dots, N$, правые части равны нулю, а граничные условия зависят только от ψ^i , которые, как отмечалось ранее, не зависят от времени. Следовательно, и функции ω^i могут быть найдены до начала вычислений; непосредственно на каждом временном слое нужно решить задачи лишь для функций ψ^* , ω^* , после чего найти константы C_i из системы (17). Тогда значения искомых функций ψ , ω на слое будут получены по формулам (16).

Для определения коэффициентов I_i^j , I_i^* системы (17) необходимо найти значения нормальных производных $\partial \omega^i / \partial n$, $\partial \omega^* / \partial n$ на твердых стенках. Ниже представлен способ вычисления этих производных в рамках метода конечных элементов.

Выделим узел конечноэлементной сетки с координатами (x_i, y_i) , лежащий на границе γ_k . Вычислим значения $\partial \omega^* / \partial n$ в этом узле. Для этого домножим первое уравнение (21) на пробную функцию ϕ_i , равную единице в выделенном узле и нулю во всех остальных. После интегрирования по области придем к соотношению

$$\int_{\gamma_k} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \phi_i' ds = \frac{\text{Re}}{\tau} \int_D \left(\omega^* \phi_i + \frac{\tau}{\text{Re}} \nabla \omega^* \cdot \nabla \phi_i - b \phi_i \right) dD \equiv \Phi_i^*, \quad (24)$$

где ϕ_i' – след базисной функции ϕ_i на границе γ_k . Чтобы найти производную $\partial \omega^* / \partial n$ в выделенном узле i , интеграл в левой части этого уравнения вычислим с помощью квадратурной формулы

$$\int_{\gamma} f(s) ds \approx \sum_l f(s_l) h_l, \quad h_l = \int_{\gamma} \phi_l' ds,$$

в которой s_l – узлы интегрирования, совпадающие с узлами сетки, а h_l – весовые коэффициенты. В результате получим

$$\int_{\gamma_k} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \phi_i' ds \approx \sum_l \frac{\partial \omega_l^*}{\partial n} \phi_i'(x_l, y_l) h_l = \sum_l \frac{\partial \omega_l^*}{\partial n} \delta_i^l h_l = \frac{\partial \omega_i^*}{\partial n} h_i. \quad (25)$$

Заменяя левую часть (24) на (25), найдем:

$$\frac{\partial \omega_i^*}{\partial n} = \frac{\Phi_i^*}{h_i}. \quad (26)$$

Аналогично получим выражения для определения узловых значений $\partial\omega_i^j/\partial n$ нормальных производных на твердых стенках:

$$\frac{\partial\omega_i^j}{\partial n} = \frac{\Phi_i^j}{h_i}, \quad \Phi_i^j = \int_D \left(\frac{\text{Re}}{\tau} \omega^j \phi_i + \nabla \omega^j \cdot \nabla \phi_i \right) dD. \quad (27)$$

Итак, алгоритм численного решения нестационарной задачи (1), (2) состоит из шага инициализации и цикла по времени.

На шаге инициализации сначала решается $N+1$ задача (18)–(20) для вспомогательных функций ψ^i . Эти функции подставляются в соотношения (15), из которых находятся функции $\tilde{\omega}^i$, определяющие граничные значения ω^i на γ_j (22). Сами функции ω^i , $i = 0, \dots, N$ находятся как решения задач (21), (22). По формулам (27) подсчитываются производные $\partial\omega^i/\partial n$, после чего вычисляются коэффициенты I_i^j системы уравнений (17).

На каждом шаге временного цикла сначала решается одна задача (18)–(20) для вспомогательной функции ψ^* . Она подставляется в соотношение (15), из которого находится функция $\tilde{\omega}^*$, определяющая граничные значения ω^* на γ_j (22). Сама функция ω^* находится как решение задачи (21), (22). По формуле (26) подсчитывается производная $\partial\omega^*/\partial n$, после чего вычисляются коэффициенты I_j^* правой части системы уравнений (17). Решение этой алгебраической системы дает набор констант C_i , которые вместе с найденными вспомогательными функциями ψ^i , ω^i , ψ^* , ω^* позволяют найти решение ψ , ω задачи на текущем временном слое по формулам (16).

3. Тестирование метода

Для проверки разработанного численного алгоритма рассмотрим три репрезентативных тестовых задачи, которые дают возможность оценить его эффективность для расчета течений с изменяющимися во времени константами C_i , наличием касательной скорости на обтекаемых телах и термоконвективных течений с внутренними источниками движения.

3.1. Течение с периодическим изменением функции тока на теле [3].

Это течение в области $D = [-3\pi, 3\pi] \times [-3\pi, 3\pi]$ с помещенным в ее центр телом γ в виде квадрата со стороной 2π определено функциями

$$\begin{aligned} \psi_e(x, y, t) &= (\cos x + \cos y + \cos x \cos y) \cos t, \\ \omega_e(x, y, t) &= -\Delta\psi_e = (\cos x + \cos y + 2 \cos x \cos y) \cos t. \end{aligned} \quad (28)$$

При соответствующем выборе слагаемого F эти функции удовлетворяют уравнениям (1), (2), периодическим граничным условиям прилипания

$$\gamma: \quad \psi_e = C_e(t) = -\cos t, \quad \frac{\partial\psi_e}{\partial n} = 0, \quad (29)$$

а также нелокальному соотношению

$$\int_{\gamma} \frac{\partial\omega_e}{\partial n} ds = 0. \quad (30)$$

В качестве начальных условий и условий Дирихле на внешних границах области для функций ψ_e и ω_e будем использовать точные значения (28).

Табл. 1

Погрешность численного решения при $t = 2\pi$

N	$\ \psi - \psi_e\ _C$	$\ \psi - \psi_e\ _2$	$\ \omega - \omega_e\ _C$	$\ \omega - \omega_e\ _2$	$ C - C_e $
880	$2.166 \cdot 10^{-1}$	$7.340 \cdot 10^{-2}$	$2.345 \cdot 10^{-1}$	$5.370 \cdot 10^{-2}$	$1.429 \cdot 10^{-2}$
8448	$2.085 \cdot 10^{-2}$	$7.074 \cdot 10^{-3}$	$5.978 \cdot 10^{-2}$	$7.660 \cdot 10^{-3}$	$1.394 \cdot 10^{-3}$
13120	$1.321 \cdot 10^{-2}$	$4.501 \cdot 10^{-3}$	$3.731 \cdot 10^{-2}$	$4.848 \cdot 10^{-3}$	$8.986 \cdot 10^{-4}$
18816	$9.118 \cdot 10^{-3}$	$3.107 \cdot 10^{-3}$	$2.666 \cdot 10^{-2}$	$3.376 \cdot 10^{-3}$	$6.271 \cdot 10^{-4}$

Табл. 2

Погрешность численного решения при $t = 4\pi$

N	$\ \psi - \psi_e\ _C$	$\ \psi - \psi_e\ _2$	$\ \omega - \omega_e\ _C$	$\ \omega - \omega_e\ _2$	$ C - C_e $
880	$2.255 \cdot 10^{-1}$	$7.798 \cdot 10^{-2}$	$2.340 \cdot 10^{-1}$	$6.420 \cdot 10^{-2}$	$1.403 \cdot 10^{-2}$
8448	$2.243 \cdot 10^{-2}$	$7.656 \cdot 10^{-3}$	$5.863 \cdot 10^{-2}$	$9.421 \cdot 10^{-3}$	$1.385 \cdot 10^{-3}$
13120	$1.421 \cdot 10^{-2}$	$4.868 \cdot 10^{-3}$	$3.819 \cdot 10^{-2}$	$6.026 \cdot 10^{-3}$	$8.894 \cdot 10^{-4}$
18816	$9.804 \cdot 10^{-3}$	$3.355 \cdot 10^{-3}$	$2.788 \cdot 10^{-2}$	$4.211 \cdot 10^{-3}$	$6.192 \cdot 10^{-4}$

Тестовый расчет производился с числом Рейнольдса $Re = 10^2$ на регулярной сетке билинейных конечных элементов с шагом по времени $\tau = 0.02$. На каждом временном слое значение C подсчитывалось с помощью условия (30) по описанной ранее процедуре и сравнивалось с точным значением $C_e = -\cos t$.

В табл. 1, 2 представлены максимальные $\|\cdot\|_C$ и среднеквадратичные $\|\cdot\|_2$ отклонения сеточных решений ψ , ω от точных ψ_e , ω_e , а также ошибки определения на моменты $t = 2\pi$, 4π . Видно, что погрешность в определении константы C не возрастает со временем и составляет от 1.5% для сетки с числом узлов $N = 880$ до 0.06% для сетки с числом узлов $N = 18816$.

3.2. Обтекание системы вращающихся круговых цилиндров [9]. Это вынужденное течение в области $D = [0, 80] \times [0, 40]$ с помещенными в нее двумя цилиндрами единичного диаметра, с центрами в точках $(40, 38.75)$, $(40, 41.25)$. На входе задан однородный поток жидкости (8). Скорость вращения цилиндров задана таким образом, что $V_1 = -V_2$, при этом вращение нижнего цилиндра направлено против часовой стрелки.

Был проведен ряд тестовых расчетов при $Re = 10^2$, $0 \leq |V_i| \leq 3$. При этом течение имеет автоколебательный характер. Для сопоставления результатов расчета с полученными в [9] определялись осредненные по периоду колебаний коэффициенты сопротивления C_d и подъемной силы C_l , а также число Струхала Sh . В работе [9] эти параметры течения рассчитывались с помощью метода конечных объемов для решения уравнений Навье–Стокса в естественных переменных.

Задача решалась с шагом по времени $\tau = 0.005$ на неструктурированной сетке из 31715 билинейных элементов ($N = 31452$) с локальным сгущением узлов около обтекаемых тел. В качестве начального условия выбиралось состояние покоя. При заданной скорости на входном сечении расход жидкости в канале C_0 явно вычисляется по формуле (7), поэтому в задачах вынужденного обтекания применять условие (6) для границы γ_0 не нужно, достаточно заменить соответствующее уравнение системы (17).

Картина течения при $|V_i| = 1.3$ представлена на рис. 2. Изменение величин C_i со временем для различных скоростей вращения показано на рис. 3.

Отклонение полученных значений коэффициента сопротивления C_d от результатов, представленных в [9], составило не более 4%, подъемной силы C_l – не более 0.86%, числа Струхала Sh – не более 1.26%.

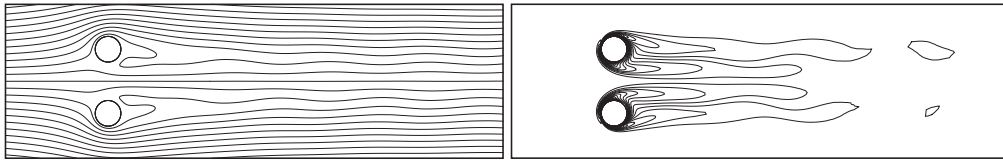


Рис. 2. Линии тока и поле завихренности течения вокруг пары вращающихся круговых цилиндров при $Re = 100, |V_i| = 1.3$

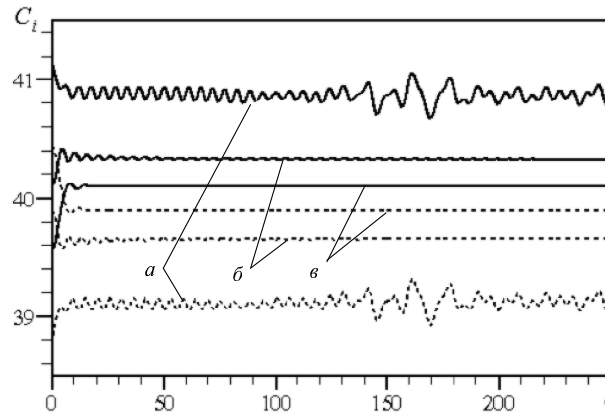


Рис. 3. Изменение величин C_i со временем при $Re = 100$: а) $|V_i| = 0$; б) $|V_i| = 1.3$; в) $|V_i| = 2$. Сплошная линия соответствует верхнему цилиндру, пунктирная – нижнему

3.3. Естественная конвекция в канале около нагретого цилиндра [10]. Для иллюстрации работы алгоритма в случае, когда расход жидкости C_0 неизвестен заранее и меняется со временем, моделировалась естественная конвекция в вертикальном канале $D = [0, 20] \times [0, 2.5]$ с помещенным в него квадратным нагревателем. На поверхности нагревателя температура $T = 1$, стенки канала теплоизолированы, а на входном сечении $T = 0$.

На стенках канала и поверхности нагревателя ставятся условия прилипания (4), а на входном сечении задается параболический нормированный профиль скорости (9). Скачок давления вдоль стенки канала в интегральном условии (6) принимается равным нулю. Вектор массовых сил, входящий в систему уравнений Навье–Стокса (1)–(3) и граничные условия (5), (6), в приближении Буссинеска равен $\mathbf{g} = (T, 0)$ [11]. Для определения температурного поля дополнительно решается уравнение конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr Re} \Delta T.$$

Здесь Pr – число Прандтля.

Расчеты проводились при $Pr = 0.72$, $10 \leq Re \leq 500$ на сетке, содержащей 16690 узлов. Для аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении переноса завихренности использовался TVD-подход с ограничителем MC, описанный в [7, 8].

Наблюдается хорошее согласование картины установившегося течения со стационарным решением, полученным в работе [10] (рис. 4, в, г). Разница в значениях

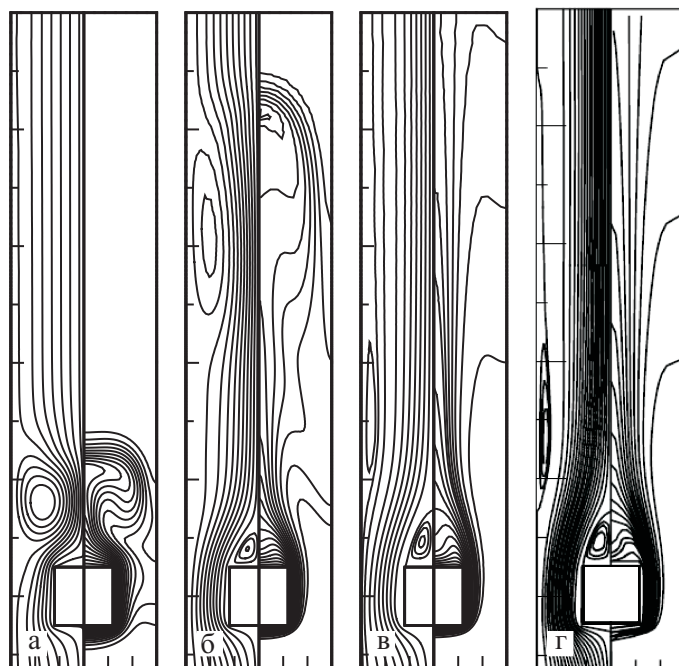


Рис. 4. Линии тока и поле температур конвективного течения при $Re = 100$, $Pr = 0.72$ на моменты: а) $t = 10$; б) $t = 20$; в) $t = 50$ в сравнении со стационарным решением [10] (г)

расхода C_0 составляет не более 2%, а отклонения чисел Нуссельта

$$Nu = \int_{\gamma} \frac{\partial T}{\partial n} ds$$

не превышает 2.5%.

Таким образом, результаты тестирования показывают, что предложенный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в преобразованных переменных позволяет адекватно моделировать как вынужденное обтекание системы тел, так и сложные конвективные процессы с заданными внутри области источниками движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00548-а, 08-01-00163-а, 07-01-00499-а).

Summary

E.I. Kalinin, A.B. Mazo. Numerical Simulation of Flow around a System of Bodies in Stream Function – Vorticity Variables.

A numerical algorithm for simulating non-stationary viscous 2D flows based on solving Navier – Stokes equations in stream function – vorticity variables is developed. The algorithm allows to model the forced flows as well as the complex convective flows around a system of bodies in channel. Problem definition is amplified with nonlocal integral equalities based on Pearson conditions in order to obtain boundary values of stream function.

Key words: numerical simulation, flow around a system of bodies, Navier – Stokes equations in stream function – vorticity variables, boundary conditions, integral Pearson conditions.

Литература

1. *Mizukami A.* A stream function-vorticity finite element formulation for Navier–Stokes equations in multiconnected domain // *Int. J. Numer. Methods. Eng.* – 1983. – No 19. – P. 1403–1409.
2. *Tezduyar T.* Finite element formulation for the vorticity-stream function form of the incompressible Euler equations on multi-connected domains // *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* – 1989. – V. 73, No 3. – P. 331–340.
3. *Liu J.-G., Wang C.* High order finite difference methods for unsteady incompressible flows in multi-connected domains // *Computers & Fluids.* – 2004. – No 33. – P. 223–255.
4. *Флетчер К.* Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
5. *Glovinski R.* Finite element methods for incompressible viscous flow // *Handbook of numerical analysis. V. 9. Numerical Methods for Fluids (Part 3).* – Elsevier Science B.V., 2003. – 1176 p.
6. *Мазо А.Б., Даутов Р.З.* О граничных условиях для уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока–завихренность при моделировании обтекания системы тел // *Инженерно-физ. журн.* – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 75–79.
7. *Kuzmin D., Turek S.* High-resolution FEM-TVD schemes based on a fully multidimensional flux limiter // *J. Comp. Phys.* – 2004. – No 198. – P. 131–158.
8. *Мазо А.Б., Калинин Е.И.* Решение задач обтекания в переменных «функция тока–вихрь» методом конечных элементов с применением TVD-подхода // *Модели и методы аэродинамики: Материалы 8-й междунар. школы-семинара.* – М.: МЦНМО, 2008. – С. 100–101.
9. *Hyun Sik Yoon, Ho Hwan Chun, Jeong Hu Kim, I.L. Ryong Park* Flow characteristics of two rotating side-by-side circular cylinder // *Computers & Fluids.* – 2009. – No 38. – P. 466–474.
10. *Khodary K., Bhattacharyya T.K.* Optimum natural convection from square cylinder in vertical channel // *Int. J. Heat Fluid Flow.* – 2006. – No 27. – P. 167–180.
11. *Мазо А.Б.* Численное моделирование свободной конвекции вязкой жидкости в канале с нагретым цилиндром // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 141–147.

Поступила в редакцию
27.04.09

Калинин Евгений Игоревич – аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *kalininei@yandex.ru*

Мазо Александр Бенцианович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *amazo@ksu.ru*